

# La Teoria delle Catastrofi

## Introduzione

La Teoria delle catastrofi, venuta alla luce negli anni Cinquanta e Sessanta ed associata sostanzialmente al matematico francese René Thom (1923-2002) rappresenta un tentativo di spiegare le forme naturali, la loro origine, la loro permanenza e le loro trasformazioni.

Partendo dall'osservazione dei fenomeni naturali, Thom considera la natura come un insieme di forme dinamiche, nel senso che nascono, entrano in conflitto e muoiono in un continuo divenire. Accanto alle forme stabili (ad esempio di una foglia, di una pietra, di un essere vivente), cioè a quelle che non alterano le loro caratteristiche essenziali in presenza di piccole modificazioni, ve ne sono altre che subiscono grandi effetti a causa di piccole perturbazioni.

I cambiamenti di forma vengono chiamati catastrofi (dal greco cambiamento, rovesciamento) e, più in generale, una catastrofe si verifica quando si rompe l'equilibrio di un sistema. Ciò può accadere o perché entra in gioco una nuova grande forza che causa la catastrofe, oppure perché una piccola causa interviene riuscendo a produrre un grande effetto.

Thom elaborò un modello matematico per studiare i cambiamenti improvvisi (catastrofi) causati da piccole alterazioni nei parametri di un sistema in equilibrio instabile, modello che può trovare applicazione in campi i più disparati quali ad esempio studio di terremoti, eruzioni vulcaniche,

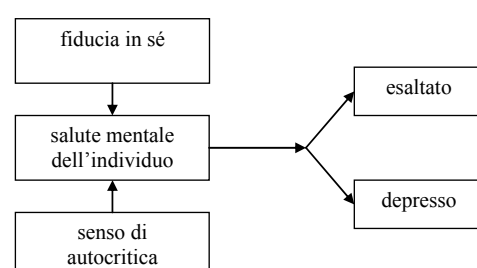
cedimenti strutturali, crolli dei mercati finanziari....

Per rendere più chiaro il significato di catastrofe, cioè di un brusco cambiamento dello stato di un sistema, prendiamo in considerazione un esempio concreto.

Esempio; Tra i molti fattori da cui dipende la salute mentale di un individuo vi sono sicuramente la fiducia in sé stessi e il senso di autocritica. Al variare di questi fattori varia evidentemente il tipo di personalità. Quando per esempio la fiducia in sé aumenta sempre più rispetto al senso critico l'individuo, a un certo punto, passa bruscamente dallo stato equilibrato allo stato esaltato.

Se, al contrario, è il senso critico a prevalere sempre più sulla fiducia in sé, il passaggio brusco, questa volta, sarà dallo stato equilibrato allo stato depresso.

La situazione può essere schematizzata come segue:



In questo esempio abbiamo un sistema, l'individuo, il cui stato è descritto da una variabile di stato, la salute mentale, che dipende da due fattori o parametri di controllo, la fiducia in sé e il senso di autocritica.

Un valore critico di un parametro di controllo è quello oltrepassando il quale si manifesta una biforcazione o catastrofe. S.M.



René Thom – matematico e filosofo francese che per primo studiò la “Teoria delle catastrofi”

## Cenni biografici

René Thom (nato a Montbéliard il 2 settembre 1923 e morto a Bures-sur-Yvette il 25 ottobre 2002) è stato un matematico e filosofo francese.

Ha studiato all'École Normale Supérieure dove era entrato nel '43, dopo aver fallito l'anno precedente l'esame di ammissione. Si è laureato nel '46. Ha insegnato all'Università di Grenoble, nel biennio '53-'54, e, dopo un periodo di studio negli Stati Uniti, è ritornato in Europa, ed ha insegna-

to all'Università di Strasburgo fino al '63. Nel '58 ha ottenuto il prestigioso riconoscimento della medaglia Fields, che gli fu assegnato, durante il Congresso di Edinburgo, per le ricerche in topologia algebrica. Nel '63 si è trasferito a Parigi all'Institut des Hautes Études Scientifiques. Nel '72 ha pubblicato “Stabilité structurelle et Morphogénèse”, il volume che divulga in tutto il mondo la Teoria delle catastrofi.

S.M.

## La matematica delle catastrofi

La Teoria delle catastrofi ha origine dalla generalizzazione dello studio di una funzione nei suoi punti critici.

Infatti, nel linguaggio matematico, una *catastrofe* è un *punto critico* (o stazionario o singolare) *degenerare* (o non regolare) di una funzione ovunque derivabile. Se,

per semplicità, consideriamo una funzione  $f: R \rightarrow R$ , ovunque derivabile, essa può avere solo tre tipi di punti critici, ossia punti di *massimo locale*, *minimo locale* e punti di *flesso*. Mentre i punti di massimo e di minimo locale sono punti critici non degeneri, i punti di flesso sono invece punti critici degeneri e perciò rappresentano altrettante catastrofi.

S.M.



# La configurazione critica di una funzione

Sia  $f: R \rightarrow R$  una funzione ovunque derivabile.

**Definizione:** Si dice che  $x_0$  è un punto critico della funzione  $f(x)$  se  $f'(x_0) = 0$ .

**Definizione:** Un punto critico  $x_0$  si dice regolare o di Morse se  $f''(x_0) \neq 0$ .

**Definizione:** Un punto critico  $x_0$  si dice singolare o degenerare se  $f''(x_0) = 0$ .

Il seguente teorema, noto come metodo delle derivate successive, fornisce un criterio per classificare i punti critici di una funzione ed è basato sull'ordine e sul segno della prima derivata  $f^{(k)}(x)$  (con  $k > 2$ ) che non si annulla in  $x_0$ .

**Teorema.** Sia  $y = f(x)$  una funzione derivabile  $n$  volte con derivata  $n$ -esima continua

nei punti interni di un intervallo  $I$ . Nel punto  $x_0$  interno ad  $I$  si abbia

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

1. Se  $n$  è pari, il punto  $x_0$  risulta essere un punto di minimo se  $f^{(n)}(x_0) > 0$  e di massimo se  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .
2. Se  $n$  è dispari, allora  $x_0$  è punto di flesso a tangente orizzontale e precisamente un flesso ascendente se  $f^{(n)}(x_0) > 0$  e discendente se  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .

In corrispondenza dei punti critici (cioè a tangente orizzontale) si cerca di rappresentare la funzione  $f(x)$  (se possibile) mediante un'espressione polinomiale di grado superiore al primo. Quindi, per semplicità, consideriamo funzioni polinomie, ricordando che:

**Definizione:** Si dice funzione polinomiale di ordine  $n$  la funzione:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (1)$$

**Teorema.** La funzione polinomiale  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  è derivabile un numero qualunque di volte e, in particolare,  $\forall x$

$$f^{(n)}(x) = a_0 n! \neq 0$$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \dots = 0$$

E' poi possibile ridurre la (1) nella forma più semplice

$$f(x) = \pm x^n + ax^{n-1} + \dots + c \quad (2)$$

Inoltre, il teorema che segue, permette di riscrivere la (2) con il suo primo termine non nullo mediante un cambio di coordinate.

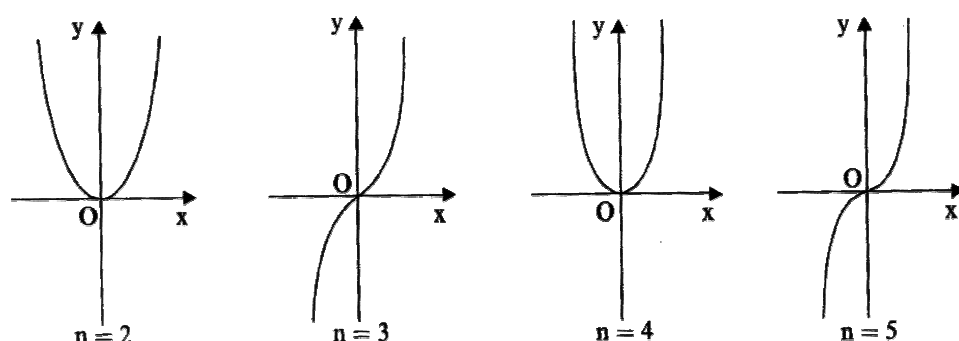
**Teorema.** Se  $x_0$  è un punto critico della (2) tale che l'unica derivata che non si annulla sia  $f^{(n)}(x)$ , allora la traslazione di equazioni

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

con  $y_0 = f(x_0)$ , riduce la (2) nella forma

$$Y = \pm X^n \quad (3)$$

Consideriamo quindi la funzione polinomiale nella forma semplificata  $y = \pm x^n$ , detta *parabola di ordine  $n$* , che è caratterizzata dalla presenza di un unico punto critico degenerare  $x_0 = 0$  e osserviamo i grafici delle parabole  $y = x^n$  per  $n = 2, 3, 4, 5$ .



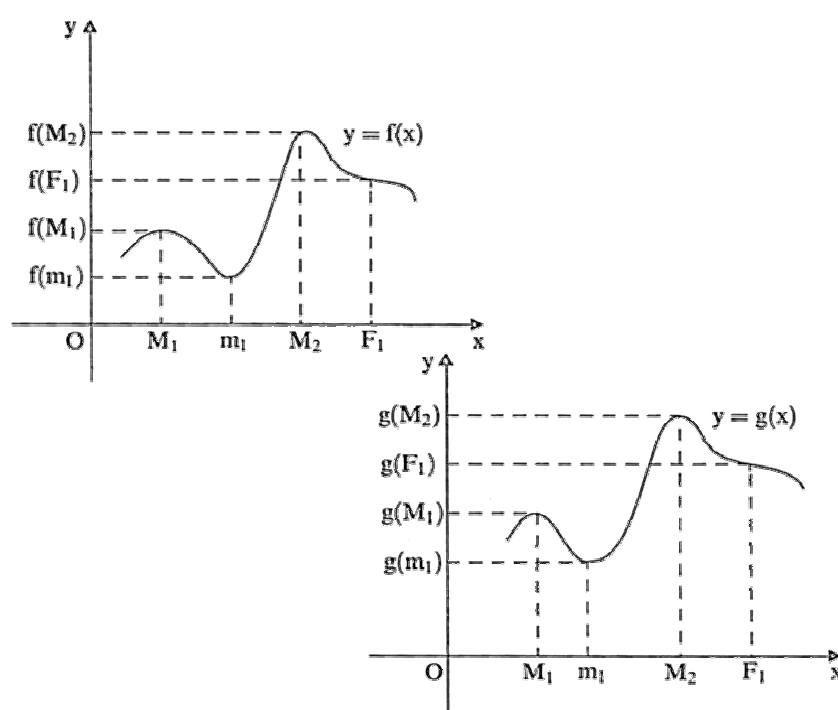
Graficamente non sembra esserci differenza significativa sia nel caso di  $n$  pari (casi in cui si ha, per  $n=2$  un punto di minimo regolare e per  $n=4$  un punto di minimo singolare) che nel caso di  $n$  dispari (casi in cui si ha un punto di flesso a tangente orizzontale).

Tuttavia visto il diverso comportamento delle derivate successive in  $x_0 = 0$  (punto critico regolare o singolare) devono esserci delle differenze e per capirle occorre dare alcune definizioni.

**Definizione:** Due funzioni  $f$  e  $g$  si dicono *differenzialmente equivalenti* in un intervallo  $I$  quando passando da una all'altra e viceversa resta invariato:

1. il numero dei punti critici e il loro tipo
2. l'ordine in cui si susseguono i punti critici
3. l'ordine in cui si susseguono i valori critici corrispondenti.

**Esempio:** Le due curve seguenti



sono differenzialmente equivalenti perché, come è facile notare, resta invariato:

1. il numero dei punti critici (quattro, sia per  $f$  che per  $g$ ), il loro tipo (infatti, per entrambe,  $M_1$  ed  $M_2$  sono punti di massimo,  $m_1$  è un punto di minimo e  $F_1$  è un punto di flesso orizzontale)
2. l'ordine in cui si susseguono che è:  $M_1 < m_1 < M_2 < F_1$
3. l'ordine in cui si susseguono i valori critici corrispondenti, che è:  $f(m_1) < f(M_1) < f(F_1) < f(M_2)$

Due funzioni differenzialmente equivalenti hanno la caratteristica di avere la stessa *configurazione critica*.

**Definizione:** Una funzione si dice di *Morse* quando nella sua configurazione critica compaiono solo punti critici di Morse tra loro distinti e tali che i corrispondenti valori critici siano anch'essi distinti.

**Esempio:** Consideriamo la funzione

$$y = x^3 - 6x^2 + 3$$

Poiché risulta:

$$y' = 3x^2 - 12x$$

i punti critici sono le soluzioni delle equazione  $y' = 0$  e cioè  $x = 0$  e  $x = 4$ .

Essendo

$$f''(0) = -12 \neq 0 \text{ e } f''(4) = 12 \neq 0$$

i punti sono regolari.

Essendo infine

$$f(0) \neq f(4)$$

si tratta di una funzione di Morse.

**Esempio:** Consideriamo la funzione

$$y = x^4 - x^3 + 1$$

Risulta:

$$y' = 4x^3 - 3x^2$$

Dall'equazione  $y' = 0$  otteniamo i punti critici  $x = 0$  e  $x = \frac{3}{4}$ .

Poiché

$$f''(0) = 0$$

il punto critico  $x = 0$  è singolare, quindi la funzione non è di Morse.



# La stabilità strutturale delle funzioni

Partendo dalla nozione di configurazione critica è possibile definire l'importante nozione di *stabilità strutturale* che ci permetterà di cogliere la differenza tra punti critici regolari e singolari.

**Definizione:** Data una funzione  $f$  si dice *perturbazione di  $f$*  la funzione

$$g(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon h(x)$$

dove  $h$  è una funzione ed  $\varepsilon \in R$ .

**Esempio:** Data la funzione  $f(x) = x^3 - 5x^2$ , una sua perturbazione è la funzione:

$$g(x, \varepsilon) = x^3 - 5x^2 + \varepsilon x$$

**Definizione:** Una funzione  $f$  si dice *strutturalmente stabile* in un intervallo  $I$  se, considerata la perturbazione  $g(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon h(x)$ , esiste un numero  $\varepsilon > 0$  tale che, per tutti gli  $\varepsilon \in R$  tali che  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , le due funzioni  $f(x)$  e  $g(x, \varepsilon)$  sono differenzialmente equivalenti in  $I$ , perciò presentano la stessa configurazione critica in  $I$ .

**Osservazione:** La definizione precedente, in sostanza, dice che: una funzione è strutturalmente stabile se la sua configurazione critica resiste a "piccole perturbazioni".

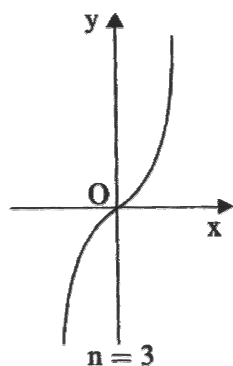
Si può dimostrare il seguente teorema.

**Teorema.** Le funzioni di Morse sono le uniche funzioni strutturalmente stabili in un intervallo  $I$ . Mostriamo ora con un esempio

che, se una funzione non è di Morse, allora non è strutturalmente stabile.

**Esempio:** Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^3$$



La sua configurazione critica è caratterizzata dall'esistenza di un unico punto critico singolare  $x=0$ , che è un flesso orizzontale: la funzione  $f(x)$  non è quindi di Morse.

Mostriamo ora che  $f(x)$  non è strutturalmente stabile.

Consideriamo la perturbazione

$$g(x, \varepsilon) = x^3 + \varepsilon x$$

Consideriamo la derivata prima

$$g' = 3x^2 + \varepsilon$$

e discutiamo, al variare di  $\varepsilon$ , l'equazione

$$3x^2 + \varepsilon = 0$$

1. Se  $\varepsilon < 0$  si hanno le 2 soluzioni:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3}} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{\varepsilon}{3}}$$

Consideriamo la derivata seconda:

$$g''(x) = 6x$$

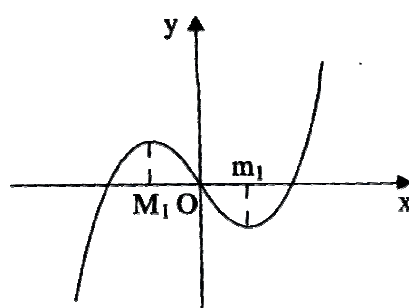
poiché:

$$g''(-\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3}}) = 6 \cdot (-\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3}}) < 0$$

e

$$g''(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3}}) = 6 \cdot (\sqrt{-\frac{\varepsilon}{3}}) > 0$$

i punti critici  $x_1$  e  $x_2$  sono regolari e,  $\forall \varepsilon > 0$  risulta  $x_1 = M_1$  (punto di massimo) e  $x_2 = m_1$  (punto di minimo).



La configurazione critica è

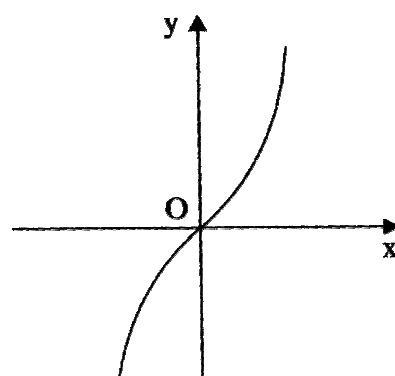
$$M_1 < m_1$$

$$g(M_1) > g(m_1)$$

2. Se  $\varepsilon > 0$  si ha:

$$g' = 3x^2 + \varepsilon > 0, \quad \forall x \in R$$

quindi  $g$  è sempre crescente e nella sua configurazione critica non compaiono punti critici.



In conclusione, poiché non esiste alcun  $\varepsilon_0 > 0$  tale che,  $\forall \varepsilon \in R$  tali che  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , la funzione  $f(x)$  conservi la sua configurazione critica, la funzione data non è strutturalmente stabile.

**Osservazioni:** Quello che è importante osservare nell'esempio precedente è che quando il parametro  $\varepsilon$  attraversa la soglia  $\varepsilon = 0$  si manifesta un cambiamento radicale nella forma della curva: due punti critici regolari per  $\varepsilon < 0$ , nessun punto critico per  $\varepsilon > 0$ . Una variazione continua del parametro ha quindi prodotto una catastrofe, cioè un cambiamento brusco.

Non mi soffermo sugli aspetti matematici della teoria delle catastrofi che sono molto complessi e difficoltosi ma mi limito a riferire quello che è uno dei risultati più importanti.

**Teorema di Thom-Mather, 1968.**

La perturbazione

$$g(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2}) = \pm x^n + \varepsilon_{n-2} x^{n-2} + \dots + \varepsilon_1 x + \varepsilon_0 \quad (n > 2)$$

detta *dispiegamento universale o catastrofe cuspidale* di  $\pm x^n$ , rappresenta la più generale perturbazione della funzione  $f(x) = \pm x^n$ .

Chiameremo *variabile di stato* la  $x$  e *parametri di controllo*  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2}$ .

S.M.



**LE PAROLE RIEMPIONO QUESTO SPAZIO DI MATERIA GRIGIA.**



**CHI ASCOLTA CRESCE.**

PUBBLICITÀ  
**P**  
PROGRESSO

AL FIANCO DEL CITTADINO.